

Schätzen und Testen

Aufgabe 1 In einer Spielrunde besteht bei einem Würfel der Verdacht, dass die Sechs zu selten fällt. Man einigt sich, den Würfel für einen Test 60 Mal zu würfeln. Tritt eine Sechs hierbei sechs Mal oder seltener auf, soll der Würfel aus dem Spiel genommen werden.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fairer Würfel aufgrund dieser Abmachung aus dem Spiel genommen wird?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein unfairer Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in \{0,09; 0,10; 0,11; \dots; 0,16\}$ aus dem Spiel genommen wird.
- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus den Aufgabenteilen a) und b) in Abhängigkeit von p graphisch dar.

Die Zufallsgröße X : „Anzahl der Sechsen bei 60 Würfeln“ sei $B(60; p)$ -verteilt mit unbekanntem $0 < p < 1$. Nun soll zum Niveau $\alpha = 0,01$ die These $H_0: p \geq \frac{1}{6}$ gegen die Alternative $H_1: p < \frac{1}{6}$ getestet werden.

- Geben Sie die Entscheidungsregel an.
- Welche Entscheidung treffen Sie, wenn die Anzahl der Sechsen zwei beträgt? Entscheiden Sie auch für die Fälle sechs und zehn Sechsen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich für die Alternative H_1 zu entscheiden, wenn $p = 0,09$ ist?

Aufgabe 2 In der Vergangenheit wurde von einem Medikament angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten einer Allergie höchstens 0,2 beträgt. Nach neuen Erfahrungen wird die Vermutung geäußert, dass die Wahrscheinlichkeit p höher liegt.

Um diese Vermutung zu überprüfen, werden 200 Patienten nach der Einnahme des Medikaments nach einer Unverträglichkeit gefragt. Nun soll die Hypothese $H_0: p \leq 0,2$ gegen die Alternative $H_1: p > 0,2$ zum Niveau $\alpha = 0,05$ getestet werden.

- Notieren Sie die exakte Testvorschrift und bestimmen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.
- Welche Entscheidung sollte getroffen werden, wenn die Unverträglichkeit bei 45 Personen beobachtet wird?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese H_0 bei $p = 0,18$ verworfen wird.

Aufgabe 3 Bei der Anwendung eines Medikaments möchte man eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit p einer Heilung machen.

Um zu testen, ob die Wahrscheinlichkeit p unter 0,8 liegt, wird das Medikament 48 Mal an erkrankten Tieren getestet. Bei 32 dieser Tiere wird ein Erfolg festgestellt.

- Testen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ die Hypothese $H_0: p \geq 8$ gegen die Alternative $H_1: p < 0,8$. Zu welcher Entscheidung führt das Versuchsergebnis?
- Welche Entscheidung ergibt sich für $\alpha = 0,01$?
- Wie groß ist im Fall $\alpha = 0,05$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Test die Hypothese abgelehnt wird, wenn für die Erfolgswahrscheinlichkeit p eine der folgenden Möglichkeiten besteht

$$p \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,75; 0,76; 0,77; 0,78; \dots; 0,82; 0,83\}$$

Benutzen Sie so weit wie möglich die Binomialverteilung.

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p graphisch dar.